دکتر محرم‌نژاد ایردموسی، عضو هیئت علمی دانشگاه شهید بهشتی

اشاره

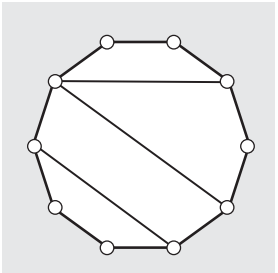
«پای تخته» عنوان بخش ثابتی در «ماه‌نامهٔ برهان» است که از دو بخش داخلی «مسئله‌ها» و «راه‌حل‌ها» تشکیل شده است. در هر شماره از ماه‌نامه، ۱۰ مسئلهٔ جدید مطرح می‌شود که همهٔ خوانندگان را به چالش می‌طلبد. توصیه می‌کنیم که به‌طور فعال به حل آن‌ها بپردازید و راه‌حل‌های خود را برای انعکاس در ماه‌نامه برایمان بفرستید تا با نام خودتان در شماره‌های بعد چاپ شود. از طراحان مسائل ریاضی نیز می‌خواهیم، مسائل جدید خود را برای طرح در بخش مسئله‌ها برایمان بفرستند. توجه داشته باشید که مسائل جدید باید همراه با حل (یا راه‌حل‌های) آن‌ها و در صورت امکان با ذکر مأخذ باشد.

مسائل و راه‌حل‌های خود را می‌توانید یا از طریق پستی (به آدرس ماه‌نامه) و یا از طریق پست الکترونیکی برایمان بفرستید که طریقهٔ دوم سریع‌تر و بهتر خواهد بود. در صورتی که خواستید از طریق پست الکترونیکی اقدام کنید، صفحات نوشته‌های خود را اسکن (با وضوح حداقل dpi۱۵۰) یا تایپ کنید و بفرستید. در پایان هر سال اسامی نفرات برتر در ماه‌نامه درج خواهد شد و به بهترین‌ها جوایز نفیسی اهدا می‌شود.

بخش اول: مسئله‌ها

۲۷۱. پانزده دانش‌آموز در یک اردوی تابستانی شرکت کردند. هر روز سه دانش‌آموز موظف بودند که در پایان کلاس‌های آن روز، کلاس را تمیز کنند. در پایان اردو، معلوم شد که هر دو دانش‌آموز دقیقاً یک روز با هم در گروه‌های مذکور شرکت داشته‌اند. این اردو چند روز طول کشیده است؟

۲۷۲. یک nضلعی محدب را می‌خواهیم به چهارضلعی‌هایی افراز کنیم. برای این کار چند قطر که در داخل nضلعی متقاطع نیستند باید رسم کنیم تا سطح nضلعی به چهارضلعی‌ها افراز شود؟ شرط لازم و کافی برای وجود چنین افرازی چیست؟ در صورت برقراری شرایط مذکور، چند قطر باید رسم کنیم؟ در شکل افرازی از یک ۱۰ضلعی را می‌بینید.



۲۷۳. ساعت دیواری کلاس ما فقط عقربه ساعت‌شمار دارد. اگر عقربه $\frac{۷}{۸}$ از فاصلهٔ بین ۴ و ۵ را طی کرده باشد، ساعت دقیقاً چند است؟

۲۷۴. در یک فروشگاه بسته‌های ۷تایی، ۱۳تایی و ۲۵تایی از کیک فروخته می‌شود. مثلاً اگر شما ۱۴ کیک بخواهید، باید دو بستهٔ ۷تایی بخرید، اما هیچ امکانی برای خرید دقیقاً ۱۵ کیک وجود ندارد. بیشترین مقدار n را بیابید، به‌طوری که امکان خرید n کیک از این فروشگاه وجود نداشته باشد.

۲۷۵. می‌خواهیم ۱۰۰ کبوتر را در تعدادی قفس جای دهیم، به‌طوری که تعداد کبوترها در قفس‌ها دوبه‌دو متفاوت باشد و اگر قفس‌ها را برحسب تعداد کبوترها مرتب کنیم، اختلاف کبوترها در دو قفس متوالی حداکثر ۲ باشد. آیا این کار امکان‌پذیر است؟

۲۷۶. در شـکل زیر، هر خانه با یک عدد پر شده است، به‌طوری که مجموع هر سه عدد متوالی برابر است با ۱۹. عدد d را مشخص کنید.

۴	a	b	c	d	e	f	g	۸	h

۲۷۷. یـک مربع ۴×۴ را می‌خواهیم با موزاییک‌هایی به فرم فرش کنیم. به چند طریق این کار امکان‌پذیر است؟

۲۷۸. **رضا** تعدادی نقطه داخل یک مربع انتخاب کرد و سـهراب با وصل کردن بعضی از آن‌ها به‌هم سـطح مربع را به مثلث‌هایی کوچک‌تر افراز کرد، به‌طـوری که رأس‌های مثلث‌ها یا یکی از چهار رأس مربع بودند و یا یکی از نقاط اضافه شده توسط رضا. اگر تعداد مثلث‌ها ۹۶ باشـد، تعـداد نقطه‌هایی که رضا اضافه کرده بود، چندتا بود؟

۲۷۹. a، b و c سـه عدد حقیقی هستند. ثابت کنید حداقل یکی از سه معادلهٔ زیر ریشهٔ حقیقی دارد:

$ax^۲+۲bx+c=۰,\quad bx^۲+۲cx+a=۰,\quad cx^۲+۲ax+b=۰$

۲۸۰. ۹۶ عدد حقیقی مثبت دور یک دایره مفروض‌اند. ثابت کنید دو عدد متوالی وجود دارند که مجموع اولی و معکوس دومی از ۲ کمتر نیست. (ترتیب اعداد در جهت ساعت‌گرد است.)

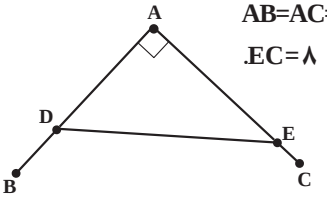
بخش دوم: راه‌حل‌ها

۲۴۱. همـهٔ مقادیـر حقیقـی a را بیابیـد، به‌طـوری کـه منحنـی دو تابـع بـا ضابطه‌هـای $y=ax^۲-x-۴$ و $y=x^۳-x^۲+۳x-۴$ دقیقاً در دو نقطه یکدیگر را قطع کنند.

از تقاطـع دو تابع داده شـده داریـم: $x^۳-x^۲+۳x-۴=ax^۲-x-۴$

یا: $x(x^۲-(a+۱)x+۴)=۰$ که نشان می‌دهد،یکی از ریشه‌ها صفر است. چون صفر ریشـهٔ معادلهٔ $x^۲-(a+۱)x+۴=۰$ نیسـت، پس برای آنکه دو منحنی دقیقاً در دو نقطه متقاطع باشـند، باید معادلهٔ فوق ریشهٔ مضاعف داشته باشد. در نتیجه: $\Delta=(a+۱)^۲-۱۶=۰$. پس: $a=۳$ یا $a=-۵$.

۲۴۲. در شـکل مقابل، AB=AC=DE، ∠CAB=۹۰° و DB=۹، EC=۸. مـطلوب اسـت: طول پاره‌خط DE.



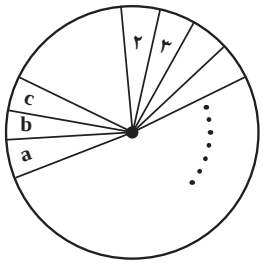
فرض کنید: $x=AB=AC=DE$. در نتیجه: $AD=x-۹$ و $AE=x-۸$.

رابطهٔ فیثاغورس را در مثلث ADE می‌نویسیم:

$(x-۸)^۲+(x-۹)^۲=x^۲ \Rightarrow x^۲-۳۴x+۱۴۵=۰ \Rightarrow x=۵$ یا ۲۹

چون: $x\geq ۹$، در نتیجه: $DE=x=۲۹$.

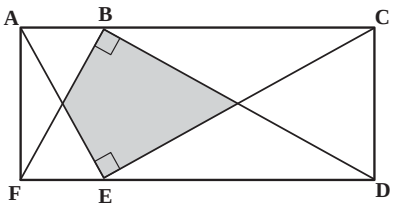
۲۴۳. دایره‌ای را به ۳۶ قسـمت مسـاوی مانند شکل تقسیم کرده‌ایـم و در هر قسـمت یک عدد صحیح نوشـته‌ایم. به‌طـوری که برای هر سـه عـدد متوالـی a، b و c داریم: b=ac. اگر دو عدد ابتدایی ۲ و ۳ باشند، حاصل جمع همهٔ اعداد را بیابید.



اگـر عددهـای بعـد از ۲ و ۳ را بنویسـیم، بـه عددهـای $\frac{۳}{۲}$، $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۱}{۳}$، $\frac{۲}{۳}$، ۲ و ۳ می‌رسـیم که نشـان می‌دهد، در خانه‌های هفتم و هشـتم ۲ و ۳ مجدداً ظاهر می‌شوند. در نتیجه مجموع اعداد ۳۶ خانه برابر است با:

$$۶(۲+۳+\frac{۳}{۲}+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\frac{۲}{۳})=۴۸$$

۲۴۴. در شـکل زیر، در مسـتطیل ACDF، CD=۵۰ و AC=۲۰۰ و دو مثلث قائم‌الزاویه AEC و FBD همنهشـت هستند. مساحت قسمت هاشورخورده را به‌دست آورید.



B را بـه E وصـل می‌کنیـم. چـون دو مثلـث AEC و FBD همنهشـتند، پس: FB=AE. در نتیجه دو مثلث قائم‌الزاویهٔ AFE و ABF به حالت وتر و یک ضلع همنهشت هستند. پس: AB=FE که نشان می‌دهد ABEF و در نتیجه BCDE مستطیل هستند. از طرف دیگر، دو قطر هر مسـتطیل آن‌را به چهار مثلث هم‌مساحت تقسیم می‌کنند. بنابراین مساحت ناحیه هاشورخورده که از دو مثلث تشکیل شده است، برابر با یک چهارم مساحت مستطیل ACDF خواهد بود.

پس مساحت ناحیهٔ مذکور برابر است با: $S=\frac{۱}{۴}\times ۲۰۰\times ۵۰=۲۵۰۰$.

۲۴۵. در تصاعد حسابی $a_1, a_2, a_3, \ldots$، داریم: $a_1 \neq a_2$ و سه جملهٔ a_1، a_2 و a_6 نیز یک تصاعد هندسی تشکیل داده‌اند. همهٔ مقادیر k را بیابید، به‌طوری که سه جملهٔ a_1، a_4 و a_k (با همین ترتیب) یک تصاعد هندسی تشکیل دهند.

چون a_1، a_2 و a_6 یک تصاعد هندسی را تشکیل می‌دهند، پس: $(a_2)^2 = a_1 a_6$. با فرض $a_1 = a$ و $a_2 = a + d$، داریم: $a_6 = a + 5d$ و در نتیجه:

$$(a+d)^2 = a(a+5d) \Rightarrow d^2 = 3ad \Rightarrow d = 3a \quad \text{یا} \quad d = 0$$

چون: $a_1 \neq a_2$، پس: $d \neq 0$ و در نتیجه: $d = 3a$ و:

$$a_n = a + (n-1)d = a + 3a(n-1) = a(3n-2)$$

بنابراین: $a_4 = 10a$ و $a_k = (3k-2)a$. پس باید داشته باشیم:

$$(10a)^2 = a(3k-2)a \Rightarrow 3k-2 = 100 \Rightarrow k = 34$$

۲۴۶. یک سهمی محور xها را در نقاط P(۲,۰) و Q(۸,۰) قطع می‌کند و رأس سهمی (V) زیر محور xها قرار دارد. اگر مساحت مثلث VPQ برابر ۱۲ باشد، مختصات V را بیابید.

راه‌حل اول: داریم: $PQ = 8 - 2 = 6$. فرض کنید h طول عمود وارد بر PQ از V باشد. بنابراین مساحت مثلث PQV برابر است با: $\frac{1}{2}(PQ)h$. چون این مساحت برابر است با ۱۲، در نتیجه: $h = 4$. چون V زیرمحور xهاست، پس عرض نقطهٔ V برابر است با: ۴-. همچنین، طول نقطهٔ V برابر میانگین طول دو نقطهٔ P و Q است، پس: $x_V = \frac{8+2}{2} = 5$، در نتیجه: $V = (5, -4)$.

راه‌حل دوم: چون ریشه‌های سهمی ۲ و ۸ هستند. پس ضابطهٔ سهمی به فرم $y = k(x-2)(x-8)$ است. طول رأس سهمی برابر است با: $\frac{-b}{2a} = \frac{+10}{2} = 5$. در نتیجه عرض رأس سهمی برابر است با: $k(5-2)(5-8)$؛ یعنی: $V = (5, -9k)$ که در آن k مثبت است. قاعدهٔ مثلث PQV برابر $6 = 2 - 8$ و ارتفاع آن $9k$ است. در نتیجه: $\frac{1}{2} \times 6 \times 9k = 12$. پس: $k = \frac{4}{9}$ که نتیجه می‌دهد: $V = (5, -4)$.

۲۴۷. مجموع شعاع‌های دو دایره برابر است با ۱۰ و محیط آن‌ها اختلافی برابر ۳ دارد. اختلاف مساحت دو دایره را به‌دست آورید.

دو شعاع را با R و r نمایش می‌دهیم. پس داریم: $R + r = 10$ و $2\pi R - 2\pi r = 3$. در نتیجه اختلاف مساحت آن‌ها برابر است با:

$$\pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R-r)(R+r)$$

$$= \frac{1}{2}(2\pi(R-r))(R+r) = \frac{3 \times 10}{2} = 15$$

۲۴۸. تابع f به این صورت تعریف شده است که اگر n زوج باشد، f(n) برابر است با: $n^2 - 1$ و اگر n فرد باشد، f(n) برابر است با: $n - 1$. همهٔ اعداد صحیح n را بیابید به‌طوری که: $f(f(n)) = 3$

فرض کنید: $m = f(n)$. اگر m فرد باشد، آن‌گاه: $f(m) = m - 1 = 3$ و در نتیجه: $m = 4$ که تناقض است. پس m باید زوج باشد. در نتیجه: $f(m) = m^2 - 1 = 3$. پس: $m = \pm 2$. در نتیجه: $f(n) = \pm 2$. اگر n فرد باشد، آن‌گاه $n - 1 = \pm 2$ و در نتیجه: $n = 3$ یا $n = -1$. اگر n زوج باشد، آن‌گاه $n^2 - 1 = \pm 2$. اما این معادله جواب صحیح ندارد. پس تنها دو مقدار ۱- و ۳ پاسخ مسئله هستند.

۲۴۹. A، B و C سه مجموعه هستند، به‌طوری‌که: $A-B = B-C = C-A$. ثابت کنید: $A = B = C$.

(برهان خلف) فرض کنید x عضوی از A باشد که در B نیست، در نتیجه: $x \in A-B$. از فرض نتیجه می‌شود: $x \in B-C$. در نتیجه: $x \in B$ که تناقض است. پس هر عضو از A در B است و در نتیجه: $A \subseteq B$. پس: $A-B = \varnothing$ که نتیجه می‌دهد: $B-C = \varnothing$ و $C-A = \varnothing$. در نتیجه: $B \subseteq C$ و $C \subseteq A$ و از آن‌جا $B \subseteq A$. بنابراین: $A = B$. به طریق مشابه داریم: $B = C$ و حکم نتیجه می‌شود.

۲۵۰. پنج نقطه روی کره‌ای مفروض هستند. ثابت کنید نیم‌کره‌ای بسته شامل حداقل چهار نقطه از آن پنج نقطه وجود دارد. (نیم‌کره‌ای را که شامل مرز خود باشد، نیم‌کرهٔ بسته می‌نامیم. مرز هر نیم‌کره یک دایرهٔ عظیمه است.)

دو نقطه از پنج نقطه را در نظر بگیرید و دایرهٔ عظیمه‌ای را که از این دو نقطه می‌گذرد C بنامید. طبق اصل لانهٔ کبوتر حداقل ۲ نقطه از ۳ نقطهٔ باقی‌مانده در یک طرف این دایره واقع می‌شوند. در نتیجه نیم‌کره‌ای شامل ۴ نقطه از این ۵ نقطه حاصل می‌شود.

رشتهٔ عددی $a_1, a_2, \ldots, a_k$ ($k \in \mathbb{Z}, k \geq 0$) مفروض است و می‌دانیم:

$$a_{m+n} + a_{m-n} = \frac{1}{2}(a_{2m} + a_{2n})$$

و $a_1 = 1$. مقدار a_{1396} کدام است؟

- الف) ۱۳۹۶
- ب) ۲۷۹۲
- ج) ۱۹۴۸۸۱۶
- د) ۱۹۴۷۴۲۰
- هـ) ۱۹۴۶۰۲۵